

CONTROL ÁLGEBRA

Febrero 2007

1.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$, aplica las propiedades de los determinantes para calcular,

sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} a & -1 & -x \\ -b & 1 & y \\ -c & 1 & z \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix}$

2.- Resuelve la ecuación $X \cdot A = B + C$

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.- Discute, según los valores de m, el rango de las matrices:

$A = \begin{pmatrix} -1 & m & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ m & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & m & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

4.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ siendo a un número real.

a) Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

b) Calcula, en función de a, los determinantes de $2A$ y A^t

5.- Discute el siguiente sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 5x - 11y + 9z = a \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 3x - 7y + 7z = 3 \end{array} \right\}$$

SOLUCIONES

$$1.- \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2 \rightarrow a) \begin{vmatrix} a & -1 & -x \\ -b & 1 & y \\ -c & 1 & z \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -a & -1 & -x \\ b & 1 & y \\ c & 1 & z \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} a & 1 & x \\ b & 1 & y \\ c & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$$

(teniendo en cuenta que $|A^T| = |A|$)

$$b) \begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2 + 0(F_1 \text{ y } F_3 \text{ proporcionales}) = -2$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 \underline{F_2 \leftrightarrow F_1} 2(-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 4$$

$$2.- X \cdot A = B + C \rightarrow B + C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$X \cdot A \cdot A^{-1} = (B + C) \cdot A^{-1} \rightarrow X = (B + C)A^{-1}$, hallemos la inversa de la matriz A $\rightarrow |A| = 1$, ahora los adjuntos:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3.- A = \begin{pmatrix} -1 & m & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ m & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{el rango de M puede ser 2 o 3}$$

orlamos el menor:

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} &= 6m + 3 + 1 - 6 - m - 3 = 5m - 5 = 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ m & -1 & -3 \end{vmatrix} &= -6 - m - 2 + 2m + 1 + 6 = m - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = 1$$

Para $m = 1$ el rango es 2

Para $m \neq 1$ el rango es 3

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & m & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \text{en principio no hay ningún menor de orden 2 distinto de cero, luego el}$$

rango podría ser 1, 2 o 3, veamos el determinante (ya que es una matriz cuadrada):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & m & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 12m + 12m + 48 - 3m^2 - 48 - 48 = -3m^2 + 24m - 48 = 0 \Rightarrow m^2 - 8m + 16 = 0$$

$$\rightarrow m = 4$$

Para $m = 4 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$ rango 1, las tres filas son proporcionales

Para $m \neq 4$ el rango es 3, ya que el determinante de B es distinto de cero.

$$4.-a) A^2 - A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - a = 12 \\ a^2 + a = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 - a - 12 = 0 \\ a^2 + a - 20 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 4, a = -3 \\ a = 4, a = -5 \end{array} \Rightarrow a = 4 \text{ para que sean iguales}$$

$$b) 2A = \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{pmatrix} \Rightarrow |2A| = -4a^2 \quad A^+ = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow |A^+| = -a^2$$

$$5.- \left. \begin{array}{l} 5x - 11y + 9z = a \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 3x - 7y + 7z = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -11 & 9 & a \\ 1 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & -7 & 7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & -7 & 7 & 3 \\ 5 & -11 & 9 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 5 & -11 & 9 & a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 5 & -11 & 9 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 4 & -16 & a - 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a - 4 \end{pmatrix}$$

Para $a = 4 \rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y + 5z = 2 \\ 2y - 8z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{8z - 3}{2} \rightarrow x = 2 - 5z + 3 \frac{8z - 3}{2} = \frac{4 - 10z + 24z - 9}{2} = \frac{14z - 5}{2}$$

$$\text{SOL: } \begin{cases} x = \frac{14t - 5}{2} \\ y = \frac{8t - 3}{2} \\ z = t \end{cases}$$

Para $a \neq 4$ Sistema Incompatible